I-1- التحقق من أن (2i) حل للمعادلة (E)

بما أن : $(2i)^3-4i(2i)^2-6(2i)+4i$

$=-8i+16i-12i+4i=8i-8i$

$=0$

فإن العدد 2i هو بالفعل حل للمعادلة (E)

2- حل المعادلة (E)

بما أن (2i) حل للمعادلة (E)

فإن الحدودية : $P(z)=z^3-4iz^2-6z+4i$

تكتب على الشكل : $(z-2i)(az^2+bz+c)$

مع a و b و c أعداد عقدية

إذن لدينا : $P(z)=az^3+(b-2ai)z^2+(c-2bi)z-2ci$

وبالتالي فإن : $\begin{cases} a=1 \\ b-2ai=-4i \\ c-2bi=-6 \\ -2ci=4i \end{cases}$

أي : $a=1$ و $b=-2i$ و $c=-2$

ومنه فإن المعادلة $P(z)=0$ تكافئ :

$(z-2i)(z^2-2iz-2)=0$

أي : $z=2i$ أو $z^2-2iz-2=0$

لدينا مميز المعادلة $z^2-2iz-2=0$

هو : $\Delta'=i^2+2$

$=-1+2=1$

إذن حلا هذه المعادلة هما : $i+1$ و $i-1$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$S=\{2i,1+i,-1+i\}$

3- إثبات أن صور حلول المعادلة (E) هي رؤوس لمثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

لتكن A و B و C النقط التي ألحاقها على التوالي $2i$ و $1+i$ و $-1+i$

لدينا : $AB=|(1+i)-2i|$

$=|1-i|$

و $=\sqrt{2}$

و $AC=|(-1+i)-2i|$

$=|-1-i|$

$=\sqrt{2}$

و $BC=|(-1+i)-(1+i)|$

$=|-2|$

$=2$

وبما أن AB =AC

و $AB^2+AC^2=BC^2$ (لأن $\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2=2^2$)

فإن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A .

II – 1- لنبين $z_n=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$

بما أن : $1+i=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$

و $-1+i=\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

فإن : $(1+i)^n=\left[\sqrt{2}^n,\frac{n\pi}{4}\right]$

و $(-1+i)^n=\left[\sqrt{2}^n,\frac{3n\pi}{4}\right]$

إذن : $(1+i)^n+(-1+i)^n=\left[\sqrt{2}^n,\frac{n\pi}{4}\right]+\left[\sqrt{2}^n,\frac{3n\pi}{4}\right]$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{3n\pi}{4}+i\sin\frac{3n\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)+i\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}\right)\right)$$

ولدينا: $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

إذن : $\cos\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{3n\pi}{4}=2\cos\left(\frac{\frac{n\pi}{4}+\frac{3n\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{n\pi}{4}-\frac{3n\pi}{4}}{2}\right)$

$$=2\cos\frac{n\pi}{2}\cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right)$$

$$=2\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}=2\sin\left(\frac{\frac{n\pi}{4}+\frac{3n\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{n\pi}{4}-\frac{3n\pi}{4}}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}$$

وبالتالي فإن : $(1+i)^n+(-1+i)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(2\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}+2i\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

$$=2.\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

إذن : $z_n=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$

2-أ- لنبين أن z_{2p} حقيقي

$$Z_{2p} = 2^{\frac{2P}{2}} \cos\frac{2p\pi}{4}\left(\cos\frac{2p\pi}{2} + i\sin\frac{2p\pi}{2}\right)$$
$$= 2^{p} \cos\frac{p\pi}{2}(\cos p\pi + i\sin p\pi)$$

لدينا : $\sin p\pi = 0$ لكل p من IN

إذن : $Z_{2p} = 2^{p}\cos\frac{p\pi}{2}.\cos p\pi$

وهذا يعني أن Z_{2p} هو عدد حقيقي

ملحوظة :

لدينا : $Z_{2p} = 0$ إذا كان P فرديا

لأنه في هذه الحالة $\cos\frac{p\pi}{2} = 0$

ولدينا : $Z_{2p} = (-1)^{\frac{p}{2}}.2^{p}$ إذا كان p زوجيا لأنه في هذه الحالة $\cos p\pi = 1$ و $\cos\frac{p\pi}{2} = (-1)^{\frac{p}{2}}$

ب- لنبين أن Z_{2p+1} تخيلي صرف

لدينا : $Z_{2p+1} = 2^{\frac{p+1}{2}} \cos\frac{(2p+1)\pi}{4} = \left(\cos\frac{(2p+1)\pi}{2} + i\sin\frac{(2p+1)\pi}{2}\right)$

$$= 2^{p+\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right)\right)$$

وبما أن : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = -\sin p\pi = 0$ لكل p من IN

فإن : $Z_{2P+1} = i2^{p+\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right)$

إذن Z_{2P+1} تخيلي صرف.

ملحوظة :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = \cos p\pi$$
$$= (-1)^{p}$$

وبالتالي فإن : $Z_{2p+1} = 2^{p+\frac{1}{2}} i(-1)^{p} \cos\left(\frac{p\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$